SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

M. BADIALE

PROPRIETA' GEOMETRICHE DI SOLUZIONI DI EQUAZIONI ELLITTICHE SU APERTI DI TIPO CILINDRICO

22 Marzo 1990

§1. Introduzione

In questo seminario presenteremo qualche recente risultato sulle proprietá geometriche di soluzioni di un'equazione ellittica; parleremo anche brevemente di soluzioni di sistemi ellittici, e di soluzioni di equazioni del primo ordine. Parlando di 'proprietá geometriche' intendiamo proprietá come monotonia lungo certe direzioni o simmetria rispetto a certi piani.

Risultati ormai classici, su questi temi, sono quelli contenuti nei lavori di B.Gidas, W.M.Ni e L.Nirenberg ([GNN1], [GNN2]), ispirati ai pionieristici lavori di A.D.Alexandrov (vedi per esempio [A]) e di J.Serrin [S]. I risultari principali ottenuti da Gidas, Ni e Nirenberg nei lavori citati riguardano la simmetria radiale di soluzioni di equazioni ellittiche, quando vi sia simmetria radiale e dell'equazione e dell'aperto in cui essa é definita. Giá in [GNN1] questi risultati sono generalizzati ad aperti ed equazioni che presentino proprietá di simmetria piú deboli: non simmetria radiale, ma solo simmetria lungo opportune direzioni. Un esempio ovvio di aperti di questo tipo é dato dai cilindri $S = (-a,a)\times\omega$, dove ω é un aperto limitato di $\mathbb{R}^{N-1}$. Ulteriori generalizzazioni di questi risultati si possono tentare con lo studio di problemi ellittici su aperti illimitati, oppure con lo studio di sistemi ellittici, o infine con lo studio di proprietá geometriche di soluzioni deboli di equazioni differenziali. Nel seguito esporró brevemente alcuni recenti risultati in queste

direzioni; parleró soprattutto dei risultati ottenuti da H.Berestycki e L.Nirenberg nello studio di equazioni ellittiche su cilindri limitati e illimitati ([BN1], [BN2]).

La tecnica fondamentale, in tutti i lavori di cui parleremo, é il cosiddetto 'metodo dei piani mobili'; l'idea fondamentale del metodo é molto semplice: si tratta, data una soluzione di un problema ellittico, di considerare la sua riflessa rispetto a un iperpiano, scelto in modo tale che la funzione cosí ottenuta (o almeno la differenza fra le due) sia ancora una soluzione (o almeno una sotto- o una sopra-soluzione) di un problema (ellittico o di altro tipo) per il quale valga un principio di confronto: le due funzioni possono allora essere confrontate, e ripetendo questa operazione per una sequenza continua di iperpiani (da cui l'immagine dei 'piani mobili') si ottengono precise informazioni (di simmetria e monotonia) sulla soluzione da cui si era partiti. Queste idee fondamentali sono alla base di tutti gli sviluppi di cui parleremo. Riporteremo alcuni risultati significativi, e la dimostrazione di uno di essi (teorema 3.2), nella quale si puó vedere 'all'opera' il metodo dei piani mobili.

§2.Proprietá geometriche su cilindri limitati

Cominciamo col ricordare un risultato ottenuto in [GNN1] per aperti di tipo cilindrico. Esporremo poi alcuni risultati di [BN2]. Il primo risultato di cui parliamo é il teorema 3.2 pag 227 di [GNN1].

Sia $S = (-a,a)\times\omega$, con ω aperto di $\mathbb{R}^{N-1}$ e $\partial\omega$ liscio. In S consideriamo il problema ellittico

$$F(x,u,u_2,..,u_n,u_{11},..,u_{\beta\gamma}) = 0 \tag{2.1}$$

dove $u_i = \partial u/\partial x_i$, $u_{ij} = \partial^2 u/\partial x_i \partial x_j$, e $2\leq\beta\leq N$, $2\leq\gamma\leq N$ (ció significa che F non dipende né da u_1 né da $u_{1\gamma}$, $\gamma\geq 2$). Qui 'ellittico' significa che esistono $M,m>0$ tali che

$$M\,|\zeta|^2 \geq \sum \backslash f(\partial F,\partial u_{ij})\,\zeta_i\zeta_j \geq m\,|\zeta|^2 \quad \text{per ogni } \zeta\in \mathbb{R}^N.$$

Si assume inoltre che F sia funzione C^1. Abbiamo allora il seguente

Teorema 2.1. Siano S,F come sopra, e inoltre si supponga

(2.2) F é decrescente in x_1 per $x_1>0$.

Sia $u\in C^2(\overline{S})$ soluzione di (2.1) soddisfacente a

(2.3) $\quad u > 0$ in S, $u = 0$ in ∂S.

Sia T_0x la riflessione di x rispetto all'iperpiano $x_1=0$. Si ha allora:

$$u_1(x)<0 \text{ e } u(x)<u(T_0x) \text{ per ogni } x\in(-a,0)\times\omega.$$

Inoltre se $u_1(x)=0$ in qualche punto di $S\{x_1=0\}$, si ha: $u(x)=u(T_0x)$ per ogni $x\in(-a,0)\times\omega$.

Questo risultato é ottenuto con quelle tecniche di 'riflessione rispetto a piani mobili' di cui abbiamo parlato nell' introduzione; i piani in questo caso sono quelli ortogonali all'asse x_1, cioé quelli di equazione $x_1=\lambda$. Spendiamo solo due parole in piú per notare che l'ipotesi sull'indipendenza di F da u_1 e da $u_{1\gamma}$ é necessaria proprio per avere l'invarianza dell'equazione nei confronti delle riflessioni determinate dai piani $x_1=\lambda$.

Esponiamo ora alcune delle generalizzazioni di questi risultati ottenute da H.Berestycki e L.Nirenberg [BN2]. Esse riguardano l'ipotesi sull'indipendenza di F da u_1 e da $u_{1\gamma}$ e le condizioni (2.3) sulla soluzione u. Per quanto riguarda queste ultime, basta considerare che l'ingrediente fondamentale per applicare la tecnica dei piani mobili é la possibilitá di confrontare una soluzione e la sua riflessa, per intuire come sia possibile

passare dalle (2.3) alle ipotesi (2.6), (2.7) nei teoremi che ora esponiamo. Considereremo un'equazione di forma piú semplice rispetto alla (2.1).

Sia dato, nel cilindro S, il problema

(2.4) $$\Delta u + f(x,u,Du) = 0$$

con le ipotesi

(2.5)

(i) $f(x,u,p)$ é continua in (x,u,p) e lipschitziana in (u,p)

(ii) Sia $x=(x_1,y)$, $x_1 \in (-a,a)$, $y \in \omega$. Per $x_1 < x_1'$, $x_1 + x_1' < 0$, $p_1 \geq 0$, si ha

$$f(x_1,y,u,p_1,..,p_n) \leq f(x_1',y,u,-p_1,..,p_n).$$

Si ha allora:

Teorema 2.2. Sia $u \in C^2(\overline{S})$ soluzione di (2.4), f soddisfacente a (2.5), e valgano le ipotesi

(2.6) $u(-a,y) \leq u(x_1,y)$ $x_1 \in (-a,a)$, $y \in \omega$, e $x_1 \in (-a,a)$ $\exists y \in \omega$ per il quale vale la disuguaglianza stretta.

(2.7) $y \in \partial\omega$, $-a<x_1<x_1'<a$, si ha $u_1(x_1,y) > 0$, $u(x_1,y) < u(x_1',y)$.

Allora

per $-a<x_1< x_1^{'}$, $x_1+ x_1^{'}) < 0$ e $y \in \omega$ si ha $u_1(x_1,y) > 0$, $u(x_1,y) <$ $u(x_1^{'},y)$.Inoltre se $u_1(0,y)=0$ $\exists y \in \omega$, u é simmetrica rispetto a x_1.

Non riportiamo la dimostrazione del Teorema 2.2. Facciamo solo qualche breve commento sulle ipotesi: notiamo che la (2.5) (ii) é precisamente l'ipotesi che permette di applicare opportuni principi di confronto; infatti se $v(x_1,y)=u(2\lambda-x_1,y)$ é la riflessa di u rispetto al piano $x_1=\lambda$, e $w=u-v$, si derivano da (2.5)(ii) delle disuguaglianze differenziali (di tipo ellittico e parabolico), per le quali valgono principi di confronto. Nella stessa ottica, le (2.6), (2.7) sono invece le ipotesi che permettono di confrontare le funzioni u,v sul bordo di opportuni aperti.

É facile ricavare dal teorema 2.2 un risultato di simmetria come il seguente

Teorema 2.3. Sia $u\in C^2(\overline{S})$ soluzione di (2.4); supponiamo valga (2.6) e assumiamo che i valori al bordo di u siano simmetrici in x_1 e soddisfino

(2.8) $\qquad u_1(x_1,y)\geq 0$ per $-a<x_1<0$ e $y\in\partial\omega$.

Supponiamo inoltre che f soddisfi a (2.5) e che sia simmetrica in (x_1,p_1). Allora u é simmetrica in x_1 e $u_1>0$ se $x_1<0$.

Per ottenere il teorema 2.3, basta notare che le ipotesi di simmetria permettono, data una soluzione u, di applicare il teorema 2.2 sia a u sia a $v(x_1,y)= u(-x_1,y)$.

É chiaro come il teorema 2.3 rappresenti una notevole generalizzazione del teorema 2.1 dal punto di vista delle condizioni al bordo per la soluzione. Ricordiamo, per concludere questa sezione, che in [BN2] vi sono ulteriori generalizzazioni a condizioni al bordo di tipo Neumann; diamo qui un esempio di tali risultati:

Teorema 2.4. Assumiamo le ipotesi del teorema 2.2, sostituendo la (2.7) con la

(2.9) $\qquad u_\nu(x_1,y)=0 \quad \text{per } -a<x_1<0 \text{ e } y\in\partial\omega.$

dove $\nu=\nu(x_1,y)$ é il versore della normale esterna a S in (x_1,y). Allora:
per $-a < x_1< x_1' ,x_1+ x_1' < 0$ e $y \in \overline{\omega}$ si ha $u_1(x_1,y)>0$, $u(x_1,y)< u(x_1'),y)$.

§3.Proprietá geometriche su cilindri illimitati

La difficoltá fondamentale, nel passaggio da cilindri limitati a cilindri illimitati, é la necessitá di ottenere stime precise sul comportamento delle soluzioni , cioé di ottenere delle condizioni all'infinito che sostituiscano le condizioni al bordo nel caso dell'aperto limitato. Questo problema é affrontato in [BN1], e di questo lavoro esporremo ora le idee fondamentali e qualche risultato. Cominciamo con alcune notazioni ed ipotesi.

Definiamo:

$S = \mathbb{R}\times\omega$, con ω aperto di $\mathbb{R}^{N-1}$ e $\partial\omega$ liscio; $S_\sigma=\{(x_1,y)|\ x_1>\sigma,\ y\in\omega\}$.

Sia $g: \omega x\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, considereremo le ipotesi

(3.1)

(i) g é continua in (y,s) e differenziabile in s (uniformemente in y per s>0).

(ii) $g(y,0)=0 \quad y\in\omega$

(iii) $\exists\delta,s_0,M>0$ tali che $|g_s(y,t)-g_s(y,t)| < Mt^\delta,\ t\in[0,s_0],y\in\omega$.

Consideremo soluzioni del problema

$$(3.2)\qquad \begin{cases} \Delta u + g(y,u) = 0 & \text{in } S \\ u = 0 & \text{in } \partial S \end{cases}$$

L'idea fondamentale di [BN1] é di approssimare le soluzioni di (3.2) con

soluzioni del problema linearizzato

$$(3.3) \qquad \begin{cases} (\Delta - a(y))v = 0 & \text{in } S \\ v = 0 & \text{in } \partial S \end{cases}$$

dove $a(y) = -g_s(y,0)$. In particolare si cercano soluzioni v di (3.3) della forma

$$(3.4) \qquad v(x_1,y) = \exp(\lambda x_1)\phi(y)$$

É facile rendersi conto che se v é soluzione di (3.4) allora $\phi(y)$ é soluzione del problema agli autovalori:

$$(3.5) \qquad \begin{cases} (-\Delta_y + a(y))\phi = \lambda^2\phi & \text{in } \omega \\ \phi = 0 & \text{in } \partial\omega \end{cases}$$

Introduciamo infine la seguente ipotesi su a(y):

(3.6) Il primo autovalore λ_1 del problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} (-\Delta_y + a(y))\sigma = \lambda_1\sigma & \text{in } \omega \\ \sigma = 0 & \text{in } \partial\omega \end{cases}$$

é strettamente positivo: $\lambda_1 > 0$

Nel seguito indicheremo ϕ con l'autofunzione positiva associata a λ_1, con

$\max\phi=1$.

Cominciamo allora con l'enunciare il

Teorema 3.1. Supponiamo (3.1),(3.6). Sia $u\in C^2(\overline{S_0})$ soluzione del problema

$$(3.7)\qquad \begin{cases}\Delta u + g(y,u) = 0 & \text{in } S_0\\ u = 0 & \text{in } \partial S_0\end{cases}$$

con

(3.8) $\quad u>0$ in S_0 e $u(x_1,y)\to 0$ per $x_1\to+\infty$, uniformemente in y.

Allora $\exists\alpha>0$ tale che, posto $\gamma=(\lambda_1)^{1/2}$

$$u(x_1,y) = \alpha\exp(-\gamma x_1)\phi(y) + o(\exp(-\gamma x_1)\phi(y)) \quad \text{per } x_1\to+\infty$$

$$u_1(x_1,y) = -\alpha\gamma\exp(-\gamma x_1)\phi(y) + o(\exp(-\gamma x_1)\phi(y)) \qquad \text{per } x_1\to+\infty.$$

Per ottenere questo risultato di approssimazione H.Berestycki e L.Nirenberg utilizzano in maniera decisiva classici lavori sulla approssimazioni di soluzioni di problemi lineari ([AN], [P]).

Utilizzando il teorema 3.1 si dimostra poi il seguente

Teorema 3.2. Supponiamo (3.1),(3.6). Sia $u\in C^2(\overline{S})$ soluzione del

problema

$$(3.7) \qquad \begin{cases} \Delta u + g(y,u) = 0 & \text{in } S \\ u = 0 & \text{in } \partial S \end{cases}$$

con

$$(3.8) \qquad u>0 \text{ in } S \text{ e } u(x_1,y)\to 0 \text{ per } |x_1|\to+\infty, \text{ uniformemente in } y.$$

Allora $\exists r>0$ tale che

$$u(r-x_1,y) = u(r+x_1,y) \quad x_1\in\mathbb{R}, y\in\omega; \quad u_1(x_1,y) < 0 \quad x_1 > r.$$

Riportiamo adesso la dimostrazione del teorema 3.2. Ricordiamo che si tratta solo di uno dei molti risultati ottenuti in [BN2].

Dimostrazione del teorema 3.2. Cominciamo con l'applicare il teorema 3.1 alle funzioni

$$(x_1,y)\to u(x_1,y)\,; \qquad (x_1,y)\to u(-x_1,y),$$

definite in S_0. Otteniamo che esistono $\alpha,\beta>0$ tali che

(3.9) $$u(x_1,y) = \alpha\exp(\gamma x_1)\phi(y) + o(\exp(\gamma x_1)\phi(y)) \quad \text{per } x_1 \to -\infty$$
$$u(x_1,y) = \beta\exp(-\gamma x_1)\phi(y) + o(\exp(-\gamma x_1)\phi(y)) \quad \text{per } x_1 \to +\infty,$$

e inoltre $R_1>0$ tale che

(3.10) $$u_1(x_1,y) < 0 \quad x_1 \leq -R_1.$$

É peró chiaro che con una traslazione sull'asse x_1 si puó ottenere che vale (3.9) <u>con</u> $\alpha=\beta$. Vogliamo allora far vedere che rispetto alla nuova origine vale

(3.11) $$u \text{ é simmetrico in } x_1; \quad u_1>0 \text{ per } x_1>0.$$

É ovvio che una volta ottenuto (3.11) si ottiene anche il teorema 3.2. La dimostrazione di (3.11) si articola in vari passi.

<u>I passo:</u> dimostriamo la seguente asserzione:

(3.12) $$\mu<0 \ \exists R_2 \geq R_1 \text{ tale che } R \geq R_2 \text{ vale:} \quad u(-R,y) \leq u(x_1,y),$$
$$\text{per } -R<x_1<R+2\mu,\ y \in \bar{\omega}$$

Per dimostrare (3.12) fissiamo $\sigma>0$ tale che $(\alpha-\sigma)\exp(-2\mu\gamma) > \alpha+\sigma$, e fissiamo $R'>R_1$ tale che

(3.13) $u(x_1,y) \le (\alpha+\sigma)\exp(\gamma x_1)\,\phi(y)$ per $x_1<-R'$;

$u(x_1,y) \ge (\alpha-\sigma)\exp(-\gamma x_1)\,\phi(y)$ per $x_1<-R'$.

É chiaro, grazie al lemma di Hopf, che esiste $d>0$ tale che: $u(x_1,y) \ge d\phi(y)$, $-R'<x_1<R'$, $y \in \bar{\omega}$; da qui si ricava allora facilmente

(3.14) $\exists R_2 \ge R'-\mu$ tale che $u(-R_2,y) \le u(x_1,y)$ per $-R_2<x_1<R'$, $y\in\omega$.

Sia ora $R\ge R_2$; usando (3.10) e (3.14) si ottiene

(3.15) $u(-R,y) \le u(x_1,y)$ per $-R<x_1<R'$, $y\in\omega$.

Per provare (3.12) ci resta allora solo da dimostrare la disuguaglianza di (3.15) per $R'<x_1<R+2\mu$. Per tali valori di x_1 si ha, da (3.13):

$$u(x_1,y)-u(-R,y) \ge \phi(y)[\,(\alpha-\sigma)\exp(-\gamma x_1)-(\alpha+\sigma)\exp(-R\gamma)] =$$
$$=\phi(y)\exp(-\gamma x_1)[\,(\alpha-\sigma)\exp(-\gamma(x_1-R))-(\alpha+\sigma)\,] \ge$$
$$\ge\phi(y)\exp(-\gamma R)[\,(\alpha-\sigma)\exp(-2\mu\gamma)-(\alpha+\sigma)\,] > 0.$$

In questo modo (3.12) é dimostrato, e il passo I é concluso.

<u>II passo</u>: dimostriamo adesso

(3.16) $u(x_1,y) < u(x_1',y)$ e $u_1(x_1,y)>0$ per $-R<x_1< x_1'$, $x_1+x_1'<2\mu$, e $y\in\omega$.

(R e μ sono dati in (3.12)).

Ora stiamo lavorando sul cilindro finito $S_\mu =\{(x_1,y)| -R<x_1<R +2\mu, y\in\omega\}$. Per $\lambda\in(-R, R +2\mu)$ definiamo $\Sigma(\lambda)= \{(x_1,y)\in S_\mu \mid x_1<\lambda\}$. Sia T_λ la riflessione rispetto all'iperpiano $x_1=\lambda$, cioé $T_\lambda(x_1,y)=(2\lambda-x_1,y)$ e sia:

$\Sigma'(\lambda)=T_\lambda(\Sigma(\lambda))$.

Dalla (3.10) si ricava facilmente che, per λ vicino a R, vale

(3.17) $u(x) < u(T_\lambda(x))$, $u_1(x) > 0$ $x=(x_1,y)\in\Sigma(\lambda)$.

Sia ora

$\bar\lambda = \sup\{\lambda<\mu \mid \text{in } \Sigma(\lambda) \text{ vale } (3.17)\}$.

Vogliamo dimostrare:

(3.18) $\bar\lambda=\mu$.

É facile rendersi conto che (3.18) implica (3.16). Per dimostrare (3.18), dato che é ovviamente $\bar\lambda \le \mu$, basta dimostare che supporre $\bar\lambda <\mu$ ci porta ad un assurdo.Per svolgere questo ragionamento per assurdo, é fondamentale considerare la funzione

$$v(x) = u(T_{\bar\lambda})(x)) - u(x)$$

definita in $\Sigma(\bar\lambda)$, e notare che essa soddisfa a un problema lineare del tipo

(3.19) $\quad \Delta v + c(x)v = 0 \ \text{ in } \ \Sigma(\bar\lambda),$

che si ottiene linearizzando l'equazione nonlineare soddisfatta da $u(x)$ e $u(T_{\bar\lambda}(x))$.

Da (3.17) si ricava:

(3.20) $\quad u(x) \le u(T_{\bar\lambda}(x)) \ , \ u_1(x) > 0 \ x=(x_1,y)\in\Sigma(\bar\lambda).$

Da (3.19), (3.20) e dal lemma di Hopf (nella versione data in [GNN1]) si ricava

(3.21) $\quad v(x) > 0 \text{ in } \Sigma(\bar\lambda); \ v_1(x) < 0 \ \text{ in } ST_{\bar\lambda}.$

Notiamo inoltre che $v_1(x) = -2u_1(x)$ in $\partial\Sigma(\bar\lambda)T_{\bar\lambda})$. L'ipotesi $\bar\lambda < \mu$, assieme alla definizione di $\bar\lambda$, implicano adesso che deve valere uno di questi due casi:

1. $\exists$ successioni $\{\lambda^i\}\subseteq\mathbb{R}$, $\{x^i\}\subseteq\mathbb{R}^N$ con $x^i\in\Sigma(\lambda^i)$, tali che $\bar{\lambda} <\lambda^i<\mu$, $\lambda^i\to\bar{\lambda}$, $u_1(x^i) \leq 0$.
2. $\exists$ successioni $\{\lambda^i\}\subseteq\mathbb{R}$, $\{x^i\}\subseteq\mathbb{R}^N$ con $x^i\in\Sigma(\lambda^i)$, tali che $\bar{\lambda} <\lambda^i<\mu$, $\lambda^i\to\bar{\lambda}, u(x^i) \geq u(T_{\lambda^i}(x^i))$.

Esaminiamo separatamente i due casi.

Caso 1. Deve essere, per (3.20), $\bar{\lambda} \leq x^i< \lambda^i$, ed é quindi chiaro che, a meno di sottosuccessioni, si ha $x^i\to\bar{x}$ con $\bar{x})\in\partial\Sigma(\bar{\lambda})T_{\bar{\lambda}})$. É anche chiaro che $u_1(\bar{x}) \leq 0$, quindi per 3.21) se$(\bar{x})=(\bar{\lambda},\bar{y})$ non puó essere $\bar{y}\in\omega$; deve essere $\in\partial\omega$, e quindi: $u_1(x)= 0$. Possiamo supporre che la normale interna a S in $\bar{x}$ sia $\nu=(0,1,0,..,0)$. Se da x^i ci spostiamo nella direzione $-\nu$, 'colpiamo' ∂S in un punto z^i, dove é $u_1=0$, e quindi in qualche punto del segmento da x^i a z^i deve essere $u_{12} \leq 0$; ma allora, passando al limite, é $u_{12}(\bar{x})\leq 0$. Abbiamo allora:

$$v_1(\bar{x}) = v_2(\bar{x}) = 0; \qquad v_{11}(\bar{x}) = v_{22}(\bar{x}) = 0; \qquad v_{12}(\bar{x}) = -2u_{12}(\bar{x}) \geq 0.$$

D'altra parte é anche $v_1(x) < 0$ in $ST_{\bar{\lambda}}$, e quindi necessariamente $v_{12}(\bar{x}) \leq 0$, e quindi $v_{12}(\bar{x}) = = 0$. Possiamo allora concludere (posto $\partial_i = \partial/\partial x_i$):

$$(-\partial_1 +\partial_2) v(\bar{x}) = (-\partial_1 +\partial_2)^2 v(\bar{x}) = 0. \tag{3.22}$$

Ma (3.22) é in contraddizione col lemma 2 di [S], e con le

argomentazioni successivamente svolte in quel lavoro. Possiamo allora concludere che il caso 1 non puó presentarsi.

Caso 2. Cominciamo col definire $v_\lambda(x) = u(T_\lambda(x)) - u(x)$ $x \in \Sigma(\lambda)$. Nel caso 2 si ha che v_{λ^i} assume in un minimo negativo interno a $\Sigma(\lambda^i)$, e possiamo supporre che esso sia x^i. Si ha allora: $D v_{\lambda^i}(x^i) = 0$, e passando a sottosuccessioni possiamo supporre $x^i \to \bar{x}\ \Sigma(\bar{x})$. Passando al limite (e notando che $v = v_{\bar{\lambda}}$) si ha allora: $Dv(\bar{x}) = 0$.

Ma da ció e da quanto argomentato sopra si ricava che non puó essere né $\bar{x} \in \Sigma$ (perché $v_1 > 0$ in $\Sigma(\bar{\lambda})$), né $\bar{x} \in ((-R,R+2\mu)\partial\omega) \cup (\{\bar{\lambda}\} x \omega$ (perché in questi settori di $\partial\Sigma(\bar{\lambda})$ si applica il lemma di Hopf), né $\bar{x} \in (\{-R\}\omega)$ (perché $v(\bar{x}) \leq 0$ mentre $v>0$ in $(\{-R\}\omega)$). Allora risulta $\bar{x}(-R,\bar{y})$ oppure $\bar{x} = (\bar{\lambda},\bar{y})$ $\exists\ \bar{y} \in \partial\omega$: in entrambi questi casi si riapplica il ragionamento precedente sulle derivate seconde assieme al lemma 2 di [S], e si riottiene una contraddizione. Con ció si é escluso anche il caso 2, e quindi (3.18) é dimostrata, e questo conclude il passo II.

<u>III passo (conclusioni).</u> Abbiamo dimostrato (3.16) $\mu<0$, ed é chiaro che da essa si ricava:

$$u_1(x_1,y) > 0 \quad x_1<0,\ y \in \omega, \tag{3.23}$$

e anche

(3.24) $\quad u(x_1,y) \leq u(-x_1,y) \quad x_1<0,\ y\in\omega.$

Ma l'equazione di partenza é simmetrica in x_1, quindi tutti ragionamenti fin qui svolti valgono anche per la funzione $u^*(x_1,y) = u(-x_1,y)$. La (3.24) diventa, per u^*:

$$u(-x_1,y) \leq u(x_1,y) \quad x_1<0,\ y\in\omega,$$

quindi

(3.25) $\quad u(-x_1,y) = u(x_1,y) \quad x_1<0,\ y\in\omega.$

La (3.23) e la (3.25) sono le tesi del teorema 3.2.

§4.Sistemi ellittici

Da quanto finora detto, e dalla dimostrazione del teorema 3.2 appena svolta, appare chiaro che questi risultati geometrici dipendono fortemente dalla presenza di un opportuno principio di confronto. É chiaro allora come appaia difficile estenderli a sistemi ellittici, per i quali in generale non valgono principi di confronto. Nel caso di sistemi ellittici debolmente accoppiati, e con opportune ipotesi, si é comunque riusciti a ottenere risultati geometrici che estendono quell fin qui esposti. Esporremo brevemente alcuni di questi risultati, traendoli da [T] e [B].

Consideriamo il seguente problema:

$$(4.1)\qquad \begin{cases} \Delta u_i + f_i(u_1,..,u_m) = 0 & \text{in } \Omega \\ u_i > 0 \ \text{ in } \Omega, \ u_i = 0 & \text{in } \partial\Omega \\ u_i \in C^2(\overline{\Omega}) \end{cases}$$

dove Ω é un aperto di $\mathbb{R}^N$, i=1,..m, e supponiamo:

(4.2) Le f_i sono funzioni C^1 e vale: $\partial f_i/\partial u_k \geq 0$ per $i \neq k$, $1 \leq i,k \leq m$.

L'ipotesi (4.2) é fondamentale per i risultati che esporremo: infatti essa consente di riottenere, con un semplice procedimento di linearizzazione,

principi di confronto per le soluzioni di (4.1) analoghi a quelli noti per la singola equazione. Con questa idea fondamentale in [T] é dimostrato il seguente risultato:

Teorema 4.1. Sia Ω la palla di raggio R e centro l'origine in $\mathbb{R}^N$, e sia $(u_1,..,u_m)$ una soluzione di (4.1), dove le f_i soddisfano a (4.2). Si ha allora che per ogni $i=1,..,m$ u_i é radialmente simmetrica e inoltre $\partial u_i/\partial r < 0$ per $0<r<R$.

Il teorema 4.1 é la versione per sistemi ellittici di uno dei fondamentali risultati di [GNN1] di simmetria radiale per aperti limitati. Il risultato seguente, contenuto in [B], riguarda invece aperti della forma $\Omega=(a,+\infty)\omega$.

Teorema 4.2. Sia $(u_1,..,u_m)$ una soluzione di (4.1), dove le f_i soddisfano a (4.2) e $\Omega=(a,+\infty)\omega$. Allora: $\partial u_i/\partial x_1 \geq 0$ in Ω per ogni $i=1,..,m$.

§5.Proprietá geometriche per soluzioni di viscositá

Finora abbiamo sempre parlato di soluzioni classiche di equazioni (o sistemi) ellittici del II ordine. Abbiamo visto peró che gli ingredienti fondamentali per applicare le tecniche di cui abbiamo parlato sono in sostanza le proprietá di invarianza dell'equazione (cioé il fatto che la riflessa di una soluzione rispetto a un piano opportuno sia, almeno, una sotto- o una sopra-soluzione) e il fatto che valga un principio di confronto fra sotto- e sopra-soluzioni. É chiaro allora come si possa tentare di dimostrare risultati analoghi a quelli fin qui esposti per problemi diversi da quelli di cui abbiamo parlato, purché per essi valgano le proprietá appena ricordate. Un lavoro di questo tipo é stato iniziato in [BB] con equazioni del primo ordine, per le quali il concetto piú adeguato di soluzione debole é quello, introdotto all'inizio degli anni '80, di 'soluzione di viscositá'.Non é il caso di ricordare qui la definizione e le principali proprietá delle soluzioni di viscositá: per questo rimandiamo a [CEL],[CIL],[CL]. Ricordiamo solo che,utilizzando il fatto che per le soluzioni di viscositá sono noti principi di confronto, in [BB] si ottengono per alcuni tipi di equazioni del I ordine risultati analoghi a quelli di [GNN1],[GNN2],[BN1],[BN2]. L'estensione di questi risultati a soluzioni di viscositá di equazioni del II ordine sará l'argomento di un lavoro futuro.

Fra i vari risultati ottenuti in [BB] riportiamo qui un teorema di tipo

analogo a quelli finora esaminati.

Teorema 5.1. Sia $S=(-a,a)\times\omega$ con ω aperto limitato in $\mathbb{R}^{N-1}$. Consideriamo in S il problema

$$H(x,u,Du) = 0 \tag{5.1}$$

con le seguenti ipotesi su $H:S\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$:

(5.2) $H(x,u,p) = \lambda(x_1,y) + G(x_1,y,u,p_1,p)$, e $R>0$ $\exists$ un modulo m_R (cioé una funzione continua, positiva e nulla in 0) tale che

$$H(y,u,\mu(x-y)) - H(x,u,\mu(x-y)) \le m_R(\mu|x-y|^2 + |x-y|) \text{ per } |x|,|y|,|u| \le$$
$$\le R,\ x,y\in S, \text{ e } \mu>0.$$

(5.3) $\lambda(x_1,y) = \lambda(-x_1,y)$; λ é continua; $\lambda(x_1,y) > 0$ $x_1\neq 0$ e $y\in\omega$; $x_1\to\lambda(x_1,y)$ é nondecrescente in $[0,a[$ $y\in\omega$.

(5.4) $G(x_1,y,u,p_1,p) = G(-x_1,y,u,-p_1,p)$; G é continua; $x_1\to G(x_1,y,u,p_1,p)$ é nondecrescente in $[0,a[$ per ogni (y,u,p); $u\to G(x,u,p)$ é nondecrescente per ogni (x,p).

Sia $u \in C(\overline{S})$ una soluzione di (5.1) tale che

(5.5) $x_1 \to u(x_1,y)$ é noncrescente in $[0,a[$ per ogni $y \in \partial\omega$; $u(a,y) \leq u(x_1,y)$ per ogni $x_1 \in [0,a[$, $y \in \omega$; u é simmetrica in x_1 su tutto ∂S.

Allora:

u é funzione simmetrica di x_1 e $x_1 \to u(x_1,y)$ é noncrescente in $[0,a[$ per ogni $y \in \omega$.

Facciamo solo un breve commento sulle ipotesi: (5.2) é una ipotesi sulla regolaritá di H, usuale in questo tipo di problemi; (5.3) e (5.4) sono ipotesi sulla monotonia di H che permettono di 'riflettere le soluzioni', infine (5.5) é l'usuale ipotesi sui dati al bordo della soluzione (analoga alle ipotesi del teorema 2.3).

BIBLIOGRAFIA

[A] A.D.ALEXANDROV: *A characteristic property of the spheres.* Ann. Mat. Pura App. (4) 58 (1962), 303-354.

[AN] S.AGMON, L.NIRENBERG: *Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space.*Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963) 121-239.

[B] M.BADIALE: *Monotonicity of solutions for elliptic systems on unbounded domains*. Preprint.

[BB] M.BADIALE, M.BARDI : *Symmetry properties of solutions of Hamilton-Jacobi equations without uniqueness*. Preprint, di prossima pubblicazione su Nonlinear Analysis TMA.

[BN1] H. BERESTYCKI, L. NIRENBERG: *Monotonicity,symmetry and antisymmetry of solutions of semilinear elliptic equations,* J. Geom. Phys. 5 (1988), 237-275.

[BN2] H. BERESTYCKI, L.NIRENBERG: *Some qualitative properties of solutions of semilinear elliptic equations in cylindrical domains,* in Analysis etc..(volume dedicato a J.Moser), a cura di P.H.Rabinowitz e E.Zehnder, Academic Press, New York (1990), 115-164.

[CEL] M.G.CRANDALL, L.C.EVANS, P.L.LIONS: *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Trans. Amer. Math. Soc. 282 (1984), 487-502.

[CIL] M.G.CRANDALL, H. ISHII, P.L.LIONS: *Uniqueness of viscosity solutions os Hamilton-Jacobi equations revisited*. J.Math. Soc. Japan 39 (1987), 581-596.

[CL] M.G.CRANDALL, P.L.LIONS: *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Trans. Amer. Math. Soc. 277 (1983) 1-42.

[GNN1] B.GIDAS,W.M.NI, L.NIRENBERG: *Symmetry and related properties via the maximum principle.* Comm. Math.Phys. 68 (1979), 309-243.

[GNN2] B.GIDAS,W.M.NI, L.NIRENBERG: *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in* R^N Adv. Math. Supp.Stud. 7A (1981), 369-402.

[P] A.PAZY: *Asymptotic expansion of solutions of ordinary differential equations in Hilbert space.* Arch.Rational Mech. Anal. 24 (1967) 193-218.

[S] J.SERRIN: *A symmetry problem in potential theory.* Arch.Rational Mech. Anal. 43 (1971) 304-318.

[T] W.C.TROY: *Symmetry Properties in Systems of Semilinear Elliptic Equations.* J. Differential Equations 42 (1981) 400-413.